ISSN 2720-2569

Współczesne Problemy Zarządzania • Volume 10 • Number 1 (20) • 2022 • 85–100

DOI: https://doi.org/10.52934/wpz.176

Józef Banaś

Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna
im. ks. B. Markiewicza w Jarosławiu
jbanas@prz.edu.pl https://orcid.org/0000-0002-2838-5569

Monika Krajewska

Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna
im. ks. B. Markiewicza w Jarosławiu
monika.krajewska@pwste.edu.pl https://orcid.org/0009-0008-0260-1113

Model Samuelsona podziału dochodu narodowego i jego uogólnienia

Wprowadzenie

Dochód narodowy jest efektem pracy całego narodu zamieszkującego obszar pewnego państwa. Wytworzenie dochodu narodowego to wysiłek całego narodu, który rozproszony jest po różnych instytucjach i przedsiębiorstwach znajdujących się na terenie rozważanego państwa.

Zwyczajowo dochód narodowy obliczany jest w skali jednego roku. Nie będziemy tutaj analizować zjawisk przyczyniających się do wytworzenia dochodu narodowego, bowiem jest to niezmiernie obszerna problematyka.

Zagadnieniem, którym zajmiemy się w poniższym artykule, jest podział dochodu narodowego. Oczywiście zagadnienie to związane jest z polityką prowadzoną przez określone państwo, które – w zależności od państwa – ma różne priorytety oraz preferencje. Dla przykładu, jeżeli państwo znajduje się w okresie prowadzonej wojny (np. Syria), to jego dochód narodowy jest w większości przeznaczany na środki związane z prowadzeniem tej wojny jak np. wytwarzanie bardzo dużej ilości broni oraz jej zakup, wyposażenie armii w odpowiedni sprzęt i umundurowanie, wytwarzanie i zakup żywności dla armii, opłata wysoko wykwalifikowanych specjalistów od działań bojowych, opłata za działania wywiadowcze itp.

Oczywiście część dochodu narodowego, wytworzona w takim państwie, musi być przeznaczona na podtrzymanie funkcjonowania pewnych instytucji w tymże państwie oraz na zaspokajanie pewnych potrzeb przez ludzi nie biorących bezpośredniego udziału w działaniach wojennych.

Zwróćmy uwagę na to, że inne są proporcje podziału dochodu narodowego w państwie toczącym wojnę w przypadku, gdy niemal całe państwo jest zaangażowane w jej prowadzenie (por. wspomniana Syria), a inne proporcje stosowane są wtedy, gdy działania wojenne prowadzone są tylko na części terytorium tego państwa (np. Ukraina). Nietrudno tutaj nie wspomnieć również o przykładzie Polski, która na pograniczu z Białorusią toczy tzw. wojnę hybrydową.

Z drugiej strony należałoby wspomnieć również o takich państwach, które w celu utrzymania władzy przez pewną grupę ludzi, angażuje w tym celu ogromne środki, zaniedbując niejednokrotnie gospodarkę całego kraju. Typowym przykładem takiego państwa jest chociażby Wenezuela, która w obecnym stanie poświęca niemal cały wysiłek narodu na utrzymanie się przy władzy grupy ludzi skupionej wokół prezydenta Nicolasa Maduro.

W dalszym ciągu, rozpatrując zagadnienie podziału dochodu narodowego, będziemy zakładać, że rozważane przez nas państwo jest w swojej większości w stanie pokoju, a ewentualne wojny prowadzone przez to państwo mają jedynie charakter lokalny. Oczywiście i tutaj mogą pojawiać się znaczące różnice w proporcjach podziału dochodu narodowego. Różnice te są podyktowane głównie przez politykę prowadzoną przez władze państwowe. Wystarczy jako przykład wziąć np. takie kraje jak Federacja Rosyjska i Francja. W podziale dochodu narodowego kreowanego w Federacji Rosyjskiej, większość dochodu przeznaczana jest na szeroko zakrojone zbrojenia i bardzo rozbudowane manewry wojskowe itp. Natomiast we Francji większość dochodu narodowego kierowana jest na inwestycje i przeznaczana jest na konsumpcję.

W rozważaniach prowadzonych w tym artykule zajmiemy się głównie rozważaniem modelu podziału dochodu narodowego, który zaproponował sławny ekonomista amerykański Paul Anthony Samuelson (1915–2009). Warto tutaj wspomnieć o tym, że dzięki swoim osiągnięciom P. A. Samuelson miał ogromny wpływ na badania prowadzone przez ekonomistów na całym świecie. I tak, P. A. Samuelson opracował teorię finansów publicznych oraz zajmował się analizą ekonomiczną, rozwinął teorię wzrostu gospodarczego i teorię dochodu, zajmował się analizą systemu podatkowego itp. P. A. Samuelson pracował również jako doradca prezydentów USA J. F. Kennedy'ego i L. B. Johnsona. W 1970 r. (jako pierwszy Amerykanin) otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii.

W przedkładanej pracy będziemy omawiać model podziału dochodu narodowego zaproponowany właśnie przez P. A. Samuelsona (por. Chiang, 1994). Model ten w istotny sposób oparty jest na teorii tzw. równań różnicowych (zob. Agarwal, 2000; Banaś, 2018; Chiang, 1994; Elaydi, 1999; Fulford, Forrester, Jones, 2001; Rumak, 1972). Okazuje się bowiem, że równania różnicowe tworzą narzędzia, które bardzo dobrze oddają skokowy charakter przebiegu zjawisk ekonomicznych, a przede wszystkim różnych aspektów związanych z podziałem dochodu narodowego.

W przedkładanej pracy przeanalizujemy dokładnie wspomniany wyżej model Samuelsona podziału dochodu narodowego, który opisany jest dość pobieżnie w książce (Chiang, 1994). Podamy także pewne uogólnienie modelu Samuelsona. Uogólnienie to wydaje się bardziej „przystawać” do realiów ekonomicznych i lepiej modelować rzeczywistość występującą w wielu krajach.

W pracy tej nie będziemy przedstawiać szczegółów teorii równań różnicowych, na której bazują prowadzone przez nas rozważania. Wynika to stąd, że podstawy teorii równań różnicowych są dość proste oraz są wyłożone w sposób przystępny i zrozumiały w wielu opracowaniach książkowych (por. Agarwal, 2000; Banaś, 2018; Cull, Flahive, Robson, 2015; Elaydi, 1999; Rumak, 1972).

Z drugiej strony, pełna prezentacja tych aspektów teorii równań różnicowych, z których korzystamy w tej pracy, byłaby bardzo obszerna i z matematycznego (jak również ekonomicznego) punktu widzenia nie wniosłaby wielu istotnych faktów do naszych rozważań.

Równanie różnicowe charakteryzujące model Samuelsona podziału dochodu narodowego

Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią zajmiemy się teraz podziałem dochodu narodowego realizowanym zgodnie z modelem zaproponowanym przez P. A. Samuelsona. Jak już wcześniej wspominaliśmy, model ten ma charakter dyskretny (inaczej: skokowy) i opiera się na idei mówiącej, że zjawiska ekonomiczne mają charakter stały w pewnych przedziałach czasowych, a po przejściu z jednego przedziału do drugiego zmieniają w sposób skokowy wartości zmiennych charakteryzujących te zjawiska.

W naszych rozważaniach będziemy przeprowadzać szczegółową dyskusję zarówno wyprowadzenia równania różnicowego opisującego przebieg analizowanych składników podziału dochodu narodowego, jak i rozwiązania wspomnianego równania różnicowego. Warto tutaj zaakcentować to, że wyprowadzone przez nas w założonym modelu Samuelsona równanie różnicowe będzie równaniem liniowym drugiego rzędu o współczynnikach stałych, niejednorodnym.

Równanie różnicowe analizowane w tym podrozdziale będzie opierać się na założeniu (zgodnie z modelem Samuelsona), że tzw. wydatki rządowe są stałe w kolejnych okresach czasu (por. Chiang, 1994).

W naszych dalszych rozważaniach symbolem Y oznaczać będziemy wielkość dochodu narodowego. Będziemy zakładać, że ten dochód Y składa się z następujących rodzajów wydatków: konsumpcji K, inwestycji I oraz wydatków rządowych R. Wielkości te możemy obserwować tylko w niektórych wybranych momentach czasu o numerach n, gdzie $n = 0,1,2,...$. Zatem przyjmujemy, że zmienne te są dyskretne i oznaczamy je symbolami Y_n, K_n, I_n oraz R_n.

Przyjmujemy również założenie, że konsumpcja K_n (dla n-tego momentu) jest funkcją zmiennej Y_{n-1}, tzn. zależy od wielkości dochodu narodowego z poprzedniego okresu czasu. Załóżmy ponadto, że jest to zależność liniowa następującej postaci

$$K_n = \gamma Y_{n-1} \tag{1}$$

gdzie $\gamma \in (0,1)$ jest wielkością stałą przedstawiającą tzw. *skłonność do oszczędzania.* Zakładamy ponadto, że inwestycje I_n są funkcją wielkości wydatków na konsumpcję mającą postać:

$$I_n = \alpha(K_n - K_{n-1}), \tag{2}$$

gdzie $\alpha > 0$ i α jest stała nazywaną *współczynnikiem akceleracji* lub *akceleratorem*.

Zależność tę opisuje tzw. *zasada akceleracji (pobudzania, przyspieszania)*, według której wielkość nakładów inwestycyjnych zmienia się wraz z fazami cyklu koniunkturalnego. W okresie wzrostu gospodarczego inwestycje rosną szybciej niż produkt narodowy, a w okresie recesji spadają szybciej niż produkt narodowy (jest to zasada sformułowana w 1913 r. przez francuskiego ekonomistę Alberta Aftaliona). Ponadto zakładamy, że wydatki rządowe R_n są stałe, a więc $R_n = R_0 = const.$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Uwzględniając dodatkowo, że dochód narodowy Y_n jest sumą konsumpcji K_n, inwestycji I_n oraz wydatków rządowych R_0, otrzymujemy równanie postaci

$$Y_n = K_n + I_n + R_0 \tag{3}$$

które wraz z równaniami (2) i (3) tworzą układ równań postaci

$$\begin{cases} K_n = \gamma Y_{n-1} \\ I_n = \alpha(K_n - K_{n-1}). \\ Y_n = K_n + I_n + R_0 \end{cases}$$

Powyższy układ opisuje tzw. *model Samuelsona podziału dochodu narodowego* (krótko *model Samuelsona*).

Przekształcimy teraz dany układ, aby otrzymać jedno równanie różnicowe opisujące współzależności akceleratora i mnożnika γ. W tym celu wstawiamy do równania (2) wartości konsumpcji odpowiednio z równania (1), otrzymując

$$I_n = \alpha(\gamma Y_{n-1} - \gamma Y_{n-2}) = \alpha\gamma(Y_{n-1} - Y_{n-2})$$

Uwzględniając zależności z powyższego równania i równania (1) w równaniu (3), dostajemy

$$Y_n = \gamma Y_{n-1} + \alpha\gamma(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + R_0, \tag{4}$$

a następnie po uproszczeniu otrzymujemy następującą zależność

$$Y_n - \gamma(1+\alpha)Y_{n-1} + \alpha\gamma Y_{n-2} = R_0.$$

Bez straty ogólności równania możemy przesunąć w powyższym równaniu wskaźnik do przodu o dwa. Zatem w konsekwencji z równania (4) otrzymujemy równanie różnicowe postaci

$$Y_{n+2} - \gamma(1+\alpha)Y_{n+1} + \alpha\gamma Y_n = R_0. \tag{5}$$

Jest to równanie różnicowe liniowe drugiego rzędu, o współczynnikach stałych, niejednorodne.

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem tego równania. W tym celu będziemy poszukiwać rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN) w postaci stałej *k*, ponieważ wydatki rządowe R_0 są stałe. Podstawiając do (5) stałą *k* w miejsce wartości dochodu narodowego otrzymujemy, że $k = R_0/(1-\gamma)$ a w konsekwencji dostajemy, że RSRN ma postać

$$Y_n = \frac{R_0}{1-\gamma}.$$

Wielkość ta stanowi również poziom dochodu odpowiadający równowadze międzyokresowej.

Następnie utwórzmy równanie charakterystyczne, odpowiadające równaniu różnicowemu jednorodnemu stowarzyszonemu z równaniem (5). Równanie to ma postać

$$\lambda^2 - \gamma(1+\alpha) + \alpha\gamma = 0. \tag{6}$$

Obliczymy wyróżnik równania charakterystycznego (6). Mamy:

$$\Delta = \gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma = \gamma[\gamma(1+\alpha)^2 - 4\alpha].$$

W celu znalezienia rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (RORJ, w skrócie) stowarzyszonego z równaniem różnicowym niejednorodnym (5), rozpatrujemy trzy przypadki w zależności od znaku wyróżnika Δ. Ponieważ $\gamma > 0$, jest to równoważne rozpatrywaniu znaku wyrażenia $\gamma(1+\alpha)^2 - 4\alpha$. Mamy zatem:

I. $\Delta > 0$, czyli $\gamma > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$.

Wtedy równanie charakterystyczne (6) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste λ_1 i λ_2. Wówczas RORJ ma następującą postać

$$Y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi (por. Banaś, 2018). Stąd otrzymujemy, że rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN), tzn. równania (5), będące sumą RORJ oraz otrzymanego wyżej RSRN, ma postać

$$Y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \frac{R_0}{1-\gamma}. \tag{7}$$

II. $\Delta = 0$, czyli $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$.

Wówczas (zob. Banaś, 2018; Rumak, 1972) równanie charakterystyczne (6) ma jeden rzeczywisty pierwiastek podwójny λ_0. W konsekwencji, RORJ ma postać (zob. Agarwal, 2000; Banaś, 2018)

$$Y_n = C_1\lambda_0^n + C_2 n\lambda_0^n,$$

natomiast RORN można wyznaczyć następująco

$$Y_n = C_1\lambda_0^n + C_2 n\lambda_0^n + \frac{R_0}{1-\gamma}., \tag{8}$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

III. $\Delta < 0$ lub równoważne $\gamma < \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$.

Wtedy równanie charakterystyczne (6) ma dwa pierwiastki zespolone $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$. Wówczas (por. Banaś, 2018) RORJ ma postać

$$Y_n = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{n}{2}}\,(C_1 \cos n\phi + C_2 \cos n\phi),$$

gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej λ^2 natomiast C_1, C_2 są dowolnymi stałymi.

W tym przypadku RORN ma postać

$$\begin{aligned} Y_n &= |\lambda_1|^n(C_1 \cos n\phi + C_2 \cos n\phi) + \frac{R_0}{1-\gamma} \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{n}{2}}(C_1 \cos n\phi + C_2 \cos n\phi) \\ &\quad + \frac{R_0}{1-\gamma}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dyskusja rozwiązań równania różnicowego w klasycznym modelu Samuelsona

Przeprowadzimy teraz bardziej szczegółową analizę skonstruowanych wyżej rozwiązań równania różnicowego (5), wyrażonych przy pomocy wzorów (7), (8) i (9).

Przypomnijmy w tym celu, że parametr γ (zwany skłonnością do oszczędzania) spełnia, zgodnie z przyjętym wcześniej założeniem, nierówności

$$0 < \gamma < 1. \tag{10}$$

Rozważmy teraz przypadek I, tzn. zakładamy, że wyróżnik Δ równania charakterystycznego (6) jest liczbą dodatnią. Oznacza to, że

$$\gamma[\gamma(1 + \alpha)^2 - 4\alpha] > 0$$

lub równoważnie

$$\gamma > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}. \tag{11}$$

Posługując się znanymi wzorami Viete'a (lub bezpośrednim rachunkiem) łatwo sprawdzić, że pierwiastki λ_1 i λ_2 równania charakterystycznego (6) spełniają zależności

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \gamma(1+\alpha) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha\gamma \end{cases}. \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ &= 1 - \gamma(1+\alpha) + \alpha\gamma = 1 - \gamma.\end{aligned}$$

Z powyższej równości oraz (10) dostajemy, że

$$0 < (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 1. \tag{13}$$

Ponieważ z założenia zarówno α > 0 jak i γ > 0, więc z drugiej równości (12) wynika, że znaki pierwiastków λ_1 oraz λ_2 są takie same, tzn.

$$sgn\lambda_1 = sgn\lambda_2.$$

Z powyższej uwagi oraz z pierwszej równości (12), ponieważ $\gamma(1 + \alpha) > 0$, wynika, że $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, a więc ostatecznie mamy, że $\lambda_1 > 0$ oraz $\lambda_2 > 0$.
Zwróćmy dalej uwagę na to, że pierwiastki λ_1, λ_2, równania (6) wyrażają się następującymi wzorami

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(1+\alpha) - \sqrt{\gamma[\gamma(1+\alpha)^2 - 4\alpha]}}{2}, \tag{14}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma(1+\alpha) + \sqrt{\gamma[\gamma(1+\alpha)^2 - 4\alpha]}}{2}, \tag{15}$$

Stąd widać, że spełniona jest nierówność

$$\lambda_1 < \lambda_2.$$

Z powyższej obserwacji oraz z (13), a także stąd, że $\lambda_1 > 0$ oraz $\lambda_2 > 0$ widzimy, że możliwe są następujące dwa przypadki:

1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$.
2. $1 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Jeżeli ma miejsce przypadek pierwszy, to z (7) otrzymujemy, że $Y_n \to R_0/(1-\lambda)$ przy $n \to \infty$. Wtedy bowiem ciągi potęgowe (λ_1^n) i (λ_2^n) są zbieżne do zera. Oznacza to, że rozwiązania równania różnicowego (5) w tym przypadku są asymptotycznie stabilne, ponieważ wraz ze wzrostem n dążą one do stanu równowagi $R_0/(1-\lambda)$.

Jeżeli natomiast ma miejsce przypadek drugi, to wtedy nietrudno zauważyć, że $Y_n \to \infty$, więc rozwiązania naszego równania różnicowego (5) mocno eksplodują. W przypadku, gdy $C_1 > 0$ oraz $C_2 > 0$ (lub przynajmniej jedna z tych stałych jest dodatnia, a druga nieujemna) oznacza to bardzo szybki wzrost dochodu narodowego.

Rozpatrzmy teraz przypadek II, gdy $\Delta = 0$, tzn. gdy

$$\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

Wtedy mamy, że

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = \frac{\gamma(1+\alpha)}{2}.$$

Z założenia, że $\gamma < 1$ (por. (10)) wynika, że możliwe są następujące trzy sytuacje.

1. $\gamma < \frac{2}{1+\alpha}$.

   Wtedy $\lambda_0 < 1$ więc na podstawie (8) oraz na podstawie własności ciągów liczbowych (por. Banaś, 2018) wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \frac{R_0}{1-\gamma}$$

   Zatem w tym przypadku rozwiązania równania różnicowego (5) są stabilne (a nawet asymptotycznie stabilne) i dążą do położenia równowagi $R_0/(1-\lambda)$.

2. $\gamma = \frac{2}{1+\alpha}$.

   Wtedy $\lambda_0 = 1$ i rozwiązanie (8) przybiera postać

$$Y_n = C_1 + C_2 n + \frac{R_0}{1-\gamma}.$$

Zatem (zakładając, że $C_2 > 0$), w tym przypadku rozwiązania eksplodują, ale ten wzrost nie ma postaci wykładniczej. Z ekonomicznego punku widzenia, oznacza to, że dochód narodowy rośnie równomiernie z roku na rok.

3. $\gamma > \frac{2}{1+\alpha}$.

Wtedy $\lambda_0 > 1$ i znowu mamy do czynienia z szybko eksplodującymi rozwiązaniami równania różnicowego (5).

Teraz rozważmy przypadek III, gdy $\Delta < 0$, tzn. gdy

$$\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

Zauważmy, że wtedy pierwiastki równania charakterystycznego (6) można przedstawić w postaci:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(1+\alpha) - i\sqrt{\gamma[4\alpha - \gamma(1+\alpha)^2]}}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{\gamma(1+\alpha) + i\sqrt{\gamma[4\alpha - \gamma(1+\alpha)^2]}}{2},$$

Wyliczając moduł którejkolwiek z tych liczb, otrzymujemy:

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{\gamma^2(1+\alpha)^2}{4} + \frac{\gamma[4\alpha - \gamma(1+\alpha)^2]}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 + 4\alpha\gamma - \gamma^2(1+\alpha)^2} = \sqrt{\alpha\gamma}.$$

Teraz, biorąc pod uwagę (10), możemy rozważyć następujące przypadki:

1. $\alpha < \frac{1}{\lambda}$. Wtedy $|\lambda_1| < 1$, więc ze wzoru (9) wnioskujemy, że w tym przypadku rozwiązania równania różnicowego (5) zmierzają do stanu równowagi $R_0/(1-\lambda)$ i są asymptotycznie stabilne.

2. $\alpha = \frac{1}{\lambda}$. Wtedy $|\lambda_1| = 1$. Stąd, na podstawie wzoru (9) wnioskujemy, że rozwiązania równania różnicowego (5) oscylują „równomiernie" wokół położenia równowagi $R_0/(1-\lambda)$.

Rzeczywiście, w tym przypadku z (9) dostajemy:

$$\begin{aligned} Y_n = C_1 \cos n\phi + C_2 \cos n\phi + \frac{R_0}{1-\gamma} = \\ = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\Bigg(\frac{C_1}{C_1^2 + C_2^2}\cos n\phi \\ + \frac{C_2}{C_1^2 + C_2^2}\cos n\phi\Bigg) + \frac{R_0}{1-\gamma} = \\ = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}(\sin\psi\cos n\phi + \sin\psi\cos n\phi) \\ + \frac{R_0}{1-\gamma} = \\ = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(n\phi + \psi) + \frac{R_0}{1-\gamma} \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie przyjęliśmy, że ψ jest takim kątem, że

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Z równości (16) widoczne jest, że rozwiązania równania różnicowego (5) oscylują wokół stanu równowagi z amplitudą $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

3. $\alpha > \frac{1}{\lambda}$. Wtedy $|\lambda_1| > 1$. Postępując tak samo jak poprzednio, możemy rozwiązanie zadania wzorem (9) zapisać w postaci:

$$Y_n = |\lambda_1|^n\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(n\phi + \psi) + \frac{R_0}{1-\gamma}.$$

Stąd widzimy, że rozwiązania Y_n równania różnicowego (5) oscylują wokół stanu równowagi, ale przy $n \to \infty$ amplituda tych oscylacji wzrasta nieograniczenie, bowiem $|\lambda_1|^n \to \infty$.

Uogólnienie modelu Samuelsona

W podrozdziale tym zajmiemy się dyskusją pewnego uogólnienia rozważanego w poprzednim rozdziale modelu Samuelsona.
Przypomnijmy, że w poprzednio omawianym modelu przyjęliśmy założenie, że ciąg (R_n) części dochodu narodowego, przeznaczonych na wydatki rządowe jest stały, tzn. $R_n = R_0$ = const. dla n = 1, 2, 3 . . . .

Rozważmy teraz taką sytuację, gdy w kolejnym kroku (etapie) wielkość dochodu narodowego wzrasta. Wtedy logicznym wydaje się taki podział, żeby jakaś część $Y_{n-1} - Y_{n-2}$ tego wzrostu, czyli pewna część wielkości , była przeznaczona na wydatki rządowe.

Załóżmy zatem, że ciąg (R_n) wydatków rządowych będzie zdefiniowany wzorem

$$R_n = R_0 + \delta(Y_{n-1} - Y_{n-2}), \tag{17}$$

gdzie $0 < \delta < 1$ *i* δ oznacza współczynnik rządowej konsumpcji wzrostu dochodu, natomiast tak, jak poprzednio, $R_0 = const.$.
Oczywiście, gdy zamiast wzrostu dochodu narodowego mamy jego spadek, to wtedy $Y_{n-1} - Y_{n-2}$ jest wielkością ujemną, a więc $R_n < R_0$.
Uwzględniając (17) w równaniu (4), tzn. podstawiając w równaniu (4) w miejsce R_0 wielkość R_n wyrażoną zależnością (17), otrzymujemy

$$Y_n - \gamma(1+\alpha)Y_{n-1} + \alpha\gamma Y_{n-2} = R_0 + \delta(Y_{n-1} - Y_{n-2}),$$

Stąd, po prostych przekształceniach, dostajemy

$$Y_n - [\gamma(1+\alpha) - \delta]Y_{n-1} + (\alpha\gamma + \delta)Y_{n-2} = R_0.$$

Przesuwając o 2 indeks w powyższym równaniu, otrzymujemy następujące równanie różnicowe

$$Y_{n+2} - [\gamma(1+\alpha) - \delta]Y_{n+1} + (\alpha\gamma + \delta)Y_{n-2} = R_0. \tag{18}$$

Zwróćmy uwagę na to, że otrzymane wyżej równanie różnicowe jest uogólnieniem poprzednio otrzymanego równania (5). Rzeczywiście, gdy $\delta = 0$, czyli gdy występuje brak rządowej konsumpcji wzrostu dochodu narodowego, to wtedy równanie (18) przekształca się do równania (5).

Zauważmy dodatkowo, że równanie (18) jest również równaniem różnicowym drugiego rzędu o współczynnikach stałych, z „niejednorodnością" równą R_0 czyli taką samą, jak w równaniu (5). Ma ono jednak inne współczynniki przy Y_{n-1} oraz Y_n.

Pisząc równanie charakterystyczne dla równania (18), dostajemy

$$\lambda^2 - [\gamma(1+\alpha) - \delta]\lambda + (\alpha\gamma + \delta) = 0. \tag{19}$$

Stąd wnioskujemy, że wyróżnik powyższego równania kwadratowego ma postać:

$$\begin{aligned}\Delta = [\gamma(1+\alpha) - \delta]^2 - 4(\alpha\gamma + \delta) \\ = \gamma^2(1+\alpha)^2 - 2\gamma\delta(1+\alpha) + \delta^2 - 4\alpha\gamma \\ - 4\delta = \\ = [\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma] + \delta^2 - 4\delta \\ - 2\gamma\delta(1+\alpha) \\ = \Delta_1 + \delta\{\delta - [4 + 2\gamma(1+\alpha)]\},\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie $\Delta_1 = \gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma$ oznacza wyróżnik równania charakterystycznego (6) omówionego w poprzednim podrozdziale.
Ponieważ przyjęliśmy, że $0 < \delta < 1$, więc wyrażenie w nawiasach klamrowych w (20) jest ujemne. W szczególności oznacza to, że $\Delta < \Delta_1$.

Z drugiej strony zwróćmy uwagę na to, że pierwiastki równania kwadratowego (19) mają znacznie bardziej skomplikowaną postać niż pierwiastki równania (5). Pierwiastki te wyrażają się wzorami:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(1+\alpha) - \delta - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{21}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma(1+\alpha) - \delta + \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{22}$$

Jeżeli rozważymy przypadek $\Delta > 0$, to ze wzorów (21) i (22) widzimy, że zachodzi nierówność $\lambda_1 < \lambda_2$.

Z drugiej strony, jeżeli wyróżnik (20) zapiszemy w następującej postaci

$$\begin{aligned}\Delta &= [\gamma^2(1+\alpha)^2 - 2\gamma\delta(1+\alpha) + \delta^2] - 4\alpha\gamma - 4\delta \\ &= [\gamma(1+\alpha) - \delta]^2 - 4(\alpha\gamma + \delta)\end{aligned}$$

to widzimy, że

$$\Delta < [\gamma(1+\alpha) - \delta\,]^2.$$

Stąd, przy założeniu, że $\Delta > 0$, otrzymujemy:

$$\gamma(1+\alpha) - \delta - \sqrt{\Delta} > 0,$$

co implikuje, że $\lambda_1 > 0$.

Ostatecznie możemy wyciągnąć wniosek, że

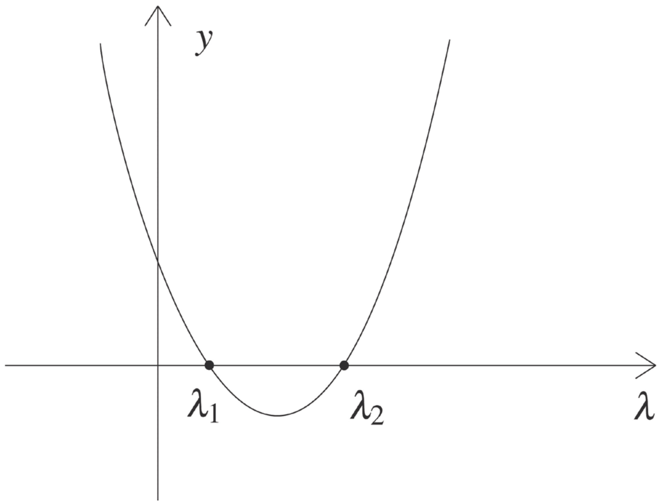
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2, \tag{23}$$

przy założeniu, że $\Delta > 0$.

Z drugiej strony, rozważając funkcję kwadratową generowaną przez lewą stronę równania (19), a więc funkcję $f = f(\lambda)$ daną wzorem

$$f(\lambda) = \lambda^2 - [\gamma(1+\alpha) - \delta]\lambda + (\alpha\gamma + \delta), \tag{24}$$

widzimy, że $f(0) = \alpha\gamma + \delta$, co wobec (23) pozwala wnioskować, że wykres tej funkcji jest parabolą o przebiegu takim, jak na poniższym rysunku:



Rysunek 1.

Źródło: opracowanie własne.

W szczególności oznacza to, że pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli, tzn. liczba

$$\lambda_\omega = \frac{1}{2}[\gamma(1+\alpha) - \delta]$$

jest liczbą dodatnią. Stąd otrzymujemy

$$\gamma(1+\alpha) > \delta. \tag{25}$$

Z drugiej strony, rozumując podobnie jak w poprzednim podrozdziale i korzystając ze wzorów Viete'a, z (19) dostajemy

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = \\ = 1 + [\gamma(1+\alpha) - \delta] + \alpha\gamma + \delta.$$

Stąd, z przyjętych założeń oraz z (25) otrzymujemy, że

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0. \tag{26}$$

Wynika stąd, że gdy $\Delta > 0$, to możliwe są tylko dwa przypadki:

1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1.$

2. $1 < \lambda_1 < \lambda_2.$

Ponieważ rozwiązanie równania różnicowego (18) przedstawia się takim samym wzorem jak rozwiązanie rozpatrywanego poprzednio równania różnicowego (5) (oczywiście w przypadku, gdy $\Delta > 0$), zatem z przeprowadzonego rozumowania wynika, że rozwiązania równania różnicowego (18) zachowują się w rozważanym przypadku dokładnie tak samo, jak rozwiązania równania (5).

Podobnie można również przeanalizować pozostałe przypadki, czyli gdy $\Delta = 0$ oraz gdy $\Delta < 0$.

Jednakże, biorąc pod uwagę dużą komplikację obliczeń, zrezygnujemy tutaj z przeprowadzenia tej analizy.

Wnioski i uwagi końcowe

Z rozpatrzonych w pracy przypadków związanych z możliwymi wartościami współczynnika skłonności do oszczędzania γ oraz współczynnika akceleracji α, a także możliwymi zależnościami między tymi współczynnikami wynika, że ciąg rozwiązań (Y_n), modelujący wartości dochodu narodowego, może zachowywać się na jeden z opisanych niżej sposobów. Należy zaznaczyć, że ciąg (Y_n) przedstawia wielkość dochodu narodowego w kolejnych rozważanych tutaj momentach czasu (np. w kolejnych latach).

Po pierwsze, jeżeli $\gamma > 4\alpha/(1+\alpha)^2$ to ciąg wartości dochodu narodowego (Y_n) zachowuje się w kolejnych momentach czasu stabilnie i w miarę wzrostu liczby wartości tego ciągu dążą do wielkości stałej $k = R_0/(1-\gamma)$, nazywanej stanem równowagi.

Po drugie, gdy $\gamma = 4\alpha/(1+\alpha)^2$, to wartości ciągu (Y_n) bardzo szybko rosną, więc następuje szybki wzrost dochodu narodowego. Wzrost ten może powodować różne, nieprzewidziane sytuacje i nie jest na ogół pożądany.

Po trzecie, gdy $\gamma = 2/(1+\alpha)$, to wtedy występuje równomierny wzrost dochodu narodowego w kolejnych, rozważanych momentach czasu. Stan taki wydaje się najbardziej pożądany z ekonomicznego punktu widzenia.

Przeprowadzona analiza obejmuje najważniejsze z omówionych tutaj sytuacji, które mogą zaistnieć przy modelowaniu podziału dochodu narodowego przy pomocy modelu Samuelsona. Zauważmy, że przeprowadzenie bardzo wszechstronnej analizy wszystkich możliwych przypadków wymagałoby niezwykle obszernego opracowania. Dlatego też zrezygnowaliśmy tutaj z takiej analizy.

Abstrakt

Model Samuelsona podziału dochodu narodowego i jego uogólnienia

Celem pracy była analiza podziału dochodu narodowego przeprowadzona w oparciu o model zaproponowany przez Samuelsona. Model ten opiera się na wykorzystaniu teorii równań różnicowych. W pracy pokazano, że wspomniany model Samuelsona

prowadzi do równania różnicowego liniowego rzędu drugiego o współczynnikach stałych, niejednorodnego.

W przedkładanej pracy przeprowadzono wszechstronną analizę zachowania się rozwiązań otrzymanego równania różnicowego. Analizę tę przeprowadzono w oparciu o interpretację ekonomiczną zachowania się tych rozwiązań.

Ponadto, rozpatrzone zostało pewne uogólnienie modelu Samuelsona związane z konkretną sytuacją ekonomiczną. Przeprowadzono również analiza zachowania się rozwiązań równania różnicowego modelującego tę uogólnioną sytuację.

Słowa kluczowe: dochód narodowy, podział dochodu narodowego, model Samuelsona, zasada akceleracji, równanie różnicowe

Abstract

The Samuelson Model of the Division of the National Income and its Generalizations

The goal of the paper was an analysis of the division of the national income performed on the base of a model proposed by Samuelson. That model is based on the use of the theory of difference equations. It was shown in the paper that the mentioned model of Samuelson leads to a linear difference equation of the second order, inhomogeneous.

In the presented paper the comprehensive analysis of the behaviour of solutions of the obtained difference equation was conducted. That analysis was performed on the base of an economic interpretation of the behaviour of those solutions.

Moreover, there was considered some generalization of the Samuelson model connected with a concrete economic situation. There was conducted also the analysis of the behaviour of solutions of a difference equation modelling that generalized situation.

Keywords: national income, division of national income, Samuelson's model, acceleration principle, difference equation

References

Agarwal, R. P. (2000). *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications*. Marcel Dekker, Inc.

Banaś, J. (2018). *Podstawy matematyki dla ekonomistów*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Chiang, A. C. (1994). *Podstawy ekonomii matematycznej*. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne.

Cull, P., Flahive, M., Robson, R. (2005). *Difference Euquations. From Rabbits to Chaos. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer.

Elaydi, S. N. (1999). *An Introduction to Difference Equations*. Springer.

Fulford, G., Forrester, P., Jones, A. (2001). *Modelling with Differential and Difference Equations*. Cambridge University Press.

Rumak, T. (1972). *Równania różnicowe*. Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie.